# ÉPREUVE PRATIQUE
# DE MATHÉMATIQUES

Dans tout ce qui suit, on pose $V = \mathbb{R}^n$, on note $(u, v)$ le produit scalaire euclidien de deux vecteurs

$$u = (u_j)_{j=1}^{n} \quad \text{et} \quad v = (v_j)_{i=2}^{n} \text{ de } V :$$

$$(u, v) = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j ,$$

et on pose $\| v \| = \sqrt{(v, v)}$ pour $v \in V$. On dit par ailleurs qu'une fonction $F : V \to \mathbb{R}$ est *dérivable* si l'on peut écrire, en *tout* point $u \in V$ :

$$F(u + w) = F(u) + (\nabla F(u), w) + \| w \| \varepsilon_u (w)$$

avec $\lim_{w \to 0} \varepsilon_u (w) = 0$, le vecteur $\nabla F(u) \in V$ ayant pour composantes les dérivées partielles de la fonction F au point $u$.

L'objet du problème est d'établir diverses conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction ait un minimum sur un sous-ensemble de V défini par des inéquations (de telles conditions sont ensuite utilisées pour construire des algorithmes permettant d'approcher de tels minimums).



1. Soit C une partie convexe fermée non vide de V, et $b$ un point de V. Montrer qu'il existe un élément $c \in C$ et un seul tel que :

$$\| b - c \| = \inf_{v \in C} \| b - v \| .$$

2. Montrer qu'un élément $c \in C$ vérifie la relation ci-dessus si, et seulement si,

$$(v - c, c - b) \geqslant 0 \text{ pour tout } v \in C.$$

3. On suppose $b \notin C$. Montrer qu'on peut trouver un vecteur $u \in V$ et un nombre réel $\alpha$ tel que :

$$(v, u) > \alpha \text{ pour tout } v \in C, \text{ et } (b, u) < \alpha.$$

4. Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille *finie* de vecteurs $a_i \in V$, *qui ne sont pas nécessairement linéairement indépendants.* Montrer que l'ensemble

$$C = \{ v = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i \in V ; \lambda_i \geqslant 0, \ i \in I \}$$

est convexe, et fermé dans V.

5. Montrer que l'inclusion

$$\{ w \in V ; (a_i, w) \geqslant 0, \ i \in I \} \subset \{ w \in V ; (b, w) \geqslant 0 \}$$

est satisfaite si, et seulement si, il existe des nombres $\lambda_i$, $i \in I$, tels que

$$\lambda_i \geqslant 0 \text{ pour tout } i \in I, \quad \text{et} \quad b = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i .$$

6. Montrer qu'une fonction dérivable $F : V \to \mathbb{R}$ est convexe si, et seulement si,

$$F(v) - F(u) \geqslant (\nabla F(u), v - u) \text{ pour tout } u, \ v \in V.$$

7. Soit $F : V \to \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable. Démontrer l'équivalence :

$$F(u) = \inf_{v \in V} F(v) \Leftrightarrow \nabla F(u) = 0.$$

. . . / . . .

E.N.S. SEVRES ET ULM 1980

## Deuxième partie

Dans tout ce qui suit, on pose

$$U = \{ v \in V;\ \Phi_i(v) \leqslant 0,\quad 1 \leqslant i \leqslant m \},$$

les fonctions $\Phi_i : V \to \mathbb{R}$ étant de la forme

$$\Phi_i : v = (v_j)_{j=1}^n \longrightarrow \Phi_i(v) = \sum_{j=1}^n c_{ij} v_j - d_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant m)$$

et on suppose l'ensemble U *non vide*. En tout point $v \in U$, on définit l'ensemble (éventuellement vide) d'indices

$$I(v) = \{ 1 \leqslant i \leqslant m;\ \Phi_i(v) = 0 \}$$

ainsi que l'ensemble

$$C(v) = \{ w \in V;\ \sum_{j=1}^n c_{ij} w_j \leqslant 0,\ i \in I(v) \}$$

($C(v) = V$ si $I(v)$ est vide). Enfin, on se donne une fonction convexe dérivable $J : V \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\lim_{\|v\| \to \infty} J(v) = +\infty.$$

8. Montrer qu'il existe (au moins) un élément $u \in U$ tel que

$$(*) \qquad J(u) = \inf_{v \in U} J(v).$$

9. Montrer qu'un élément $u \in U$ est solution de (*) si, et seulement si,

$$(\nabla J(u),\ v - u) \geqslant 0 \text{ pour tout } v \in U.$$

10. Montrer qu'un élément $u \in U$ est solution de (*) si, et seulement si,

$$(\nabla J(u),\ w) \geqslant 0 \text{ pour tout } w \in C(u).$$

**Tournez la page S. V. P.**

11. Montrer qu'un élément $u \in U$ est solution de (*) si, et seulement si, il existe des nombres $\lambda_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, tels que

$$\begin{cases} \lambda_i \geqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant m;\ \sum_{i=1}^m \lambda_i \Phi_i(u) = 0; \\ \nabla J(u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla \Phi_i(u) = 0. \end{cases}$$

12. On pose

$$M = \{ \mu = (\mu_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m;\ \mu_i \geqslant 0,\quad 1 \leqslant i \leqslant m \}$$

et on définit la fonction

$$L :\ (v, \mu) \in V \times M \longrightarrow L(v, \mu) = J(v) + \sum_{i=1}^m \mu_i \Phi_i(v).$$

Montrer que le problème : « Trouver un élément $u \in U$ vérifiant (*) » a (au moins) une solution si, et seulement, il existe (au moins) un élément $(\bar{u}, \bar{\lambda}) \in V \times M$ vérifiant

$$(**) \qquad \sup_{\mu \in M} L(\bar{u}, \mu) = L(\bar{u}, \bar{\lambda}) = \inf_{v \in V} L(v, \bar{\lambda}).$$

13. S'il existe un élément $(\bar{u}, \bar{\lambda})$ vérifiant (**), montrer que

$$\sup_{\mu \in M} \inf_{v \in V} L(v, \mu) = L(\bar{u}, \bar{\lambda}) = \inf_{v \in V} \sup_{\mu \in M} L(v, \mu).$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail